УДК 517.977.5, 51.77 **DOI** 10.17150/2500-2759.2021.31(2).216-220

МОДЕЛЬ МЕЖВРЕМЕННОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПОВЕДЕНИЯ ПРЕДПРИНИМАТЕЛЯ

Н.В. Антипина
Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация

Информация о статье

Дата поступления
15 мая 2021 г.

Дата принятия к печати
21 июня 2021 г.

Дата онлайн-размещения
9 июля 2021 г.

Ключевые слова

Полезность; потребление; капитал; производственная функция; оптимальное управление; качественный анализ

Аннотация

Межвременная задача поведения потребителя является основой современных макроэкономических моделей. Интерес к такого рода задачам продиктован желанием расширить спектр направлений, по которым представляется возможным проводить дополнительные математические исследования в теории потребления. В статье рассмотрена задача максимизации дисконтированной полезности от потребления индивидуальным предпринимателем за счет оптимального распределения им денежных средств, полученных в виде дохода от его производственной фирмы и процентов на активы. Отличие рассматриваемой задачи от базовой динамической задачи поведения потребителя заключается в том, что предприниматель как индивид выступает в двух ипостасях — как потребитель и производитель. Кроме того, задача характеризуется двумя особенностями: специфическим бюджетным ограничением, включающим производственную функцию и представляющим собой нестандартное дифференциальное соотношение, а также наличием смешанных граничных условий на величину капитала и активов. Приведена формализация задачи в виде динамической оптимизационной модели, исследование которой проведено с использованием математического анализа и аппарата теории оптимального управления. В зависимости от соотношений параметров модели найдены две стратегии, рекомендованные предпринимателю как наилучшие. Разработанная в ходе исследования модель может служить инструментом принятия решений, так как предлагает оптимальные стратегии распределения финансовых средств предприятия, ведущие к максимизации полезности потребления.

INTERTEMPORAL OPTIMIZATION MODEL OF ENTREPRENEUR'S BEHAVIOR

Natalya V. Antipina
Baikal State University, Irkutsk, Russian Federation

Article info
Received
May 15, 2021

Accepted
June 21, 2021

Available online
July 9, 2021

Keywords

Utility; consumption; capital; production function; optimal control; qualitative analysis

Abstract

The intertemporal problem of consumer's behavior is the basis of modern models. The interest in this kind of problems is determined by the attempt to widen the range of directions within which it is possible to conduct additional mathematical research in the theory of consumption. The article considers the problem of maximizing discounted utility derived from an entrepreneur's consumption due to optimal allocation of monetary means which he gets as profit from his production company and interest on assets. The difference of this problem from the basic dynamic problem of consumer's behavior lies in the fact that an entrepreneur as an individual acts in two roles: as a consumer and as a manufacturer. Furthermore, the problem is characterized by two peculiarities: a distinctive budget limitation which includes production function and reveals an irregular differential relation and also by the presence of mixed boundary conditions on the value of capital and assets. Formalization of the problem as a dynamic optimization model is

© Антипина Н.В., 2021

given. It was studied with the use of mathematical analysis and the means of the optimal control theory. According to parameter correlations of the model, two strategies were identified which can be recommended for an entrepreneur as the most optimal ones. The model that was developed in the course of research can serve as a tool for taking decisions because it suggests optimal strategies of allocation of financial means in an enterprise which leads to maximization of consumption utility.

Введение

Основы теории полезности потребительских благ, рациональности поведения индивида были изложены в трудах А. Смита [1, с. 9–15; 2] и Д. Рикардо [1, с. 16–20; 2, с. 30], в законах основоположника маржинализма Г.Г. Госсена. Исследования взаимосвязи понятий «потребление», «сбережение» и «благосостояние» принадлежат А. Маршаллу, А. Пигу [1, с. 55–60, 87–90; 3, с. 101], заложившим основы микроэкономической теории потребления.

Одна из главных заслуг маржиналистского течения — это попытка создания модели поведения человека, представляемой в математической форме. С подачи маржиналистов экономико-математическое моделирование и применение математического аппарата для исследования моделей по сей день представляют собой мощный инструмент для решения подобного рода задач [4–9].

Формирование экономических прикладных аспектов и моделей оптимизации поведения отражены в работах С. Зельдеса, Дж. Скиннера, Р. Хаббарда [10]. Современные подходы к исследованию динамической оптимизации потребления представлены в макромоделях рынка благ (например, модель Ф. Рамсея, Д. Касса, Т. Купманса [11, с. 235]) и основаны на применении предельного анализа и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Наиболее важный вклад модели Рамсея – Касса – Купманса состоит в том, что она раскрыла механизм формирования нормы сбережений через решения потребителей, а также стала отправной точкой для многих исследователей, которые использовали ее концептуальный и математический аппарат для построения своих моделей. Среди свежих работ отечественных авторов по данной тематике можно выделить работу В.В. Сараева [12, с. 25], в которой предпринята попытка анализа проблем управления потребительским выбором со стороны производителей.

Между тем многие исследователи ограничиваются количественным анализом функций потребления, высоким уровнем формализации, в меньшей степени останавливаются на качественном анализе этих процессов.

В данной статье приведены постановка и качественный анализ модификации задачи межвременной оптимизации поведения потребителя [13, с. 14]. На первый взгляд задача похожа на стандартную экономическую задачу: потребитель желает максимизировать полезность от потребления, не выходя за имеющиеся рамки бюджетного ограничения. Однако исследуемая задача обладает рядом особенностей:

– аргументами функции полезности являются не объемы различных благ, а объемы потребления в каждый момент рассматриваемого временного периода;

– бюджетное ограничение содержит прозводственную функцию и, кроме того, носит смешанно-динамический характер одновременно по капиталу и активам;

– граничные условия одновременно включают в себя величину капитала и активов, т.е. также являются смешанными;

– неиспользование всего имеющегося текущего дохода на потребление вовсе не является ситуацией нерационального использования денежных средств.

Построена оптимизационная модель поставленной задачи, исследование которой с учетом указанных особенностей не является тривиальным и проводится с помощью принципа максимума и элементов математического анализа. Результаты качественного анализа модели интепретированы экономически: в зависимости от значений параметров модели предпринимателю предложены две оптимальные стратегии распределения его финансовых средств, ведущих к максимизации полезности потребления.

Постановка задачи и описание экономико-математической модели

Индивидуальный предприниматель владеет производственной фирмой, доходы которой определяются производственной функцией $Q(K)$. В каждый момент времени $t \in [0; T]$ его финансовые средства распределяются на долю в инвестиции $K(t) + A(t)$ и долю на потребление $c(t)$, таким образом выполняется условие $0 \leq c(t) \leq 1$ (оставшаяся доля средств направляется в инвестиции). У

Известия Байкальского государственного университета. 2021. Т. 31, № 2. С. 216–220

ISSN 2500-2759

потребителя есть выбор: вложить средства в капитал $K(t)$ или в активы $A(t)$. Представление о распределении средств дается бюджетным ограничением

$$K(t) + A(t) = rA(t) + Q(K) - c(t),$$

которое имеет следующий экономический смысл: поток инвестиций в каждый момент времени t увеличивается за счет процентов на активы в размере $rA(t)$, дохода $Q(K)$ производственной фирмы предпринимателя и уменьшается из-за текущего потребления $c(t)$.

Сделаем предположения в рамках модели: в момент времени $t = 0$ уровень финансов индивида (начальный капитал $K(0)$ плюс уровень активов $A(0)$) составляет W_0; в конечный момент времени $t = T$ потребитель желает иметь в наличии средства $K(t) + A(t)$ не ниже уровня W_T.

Функция $U(c)$ — это функция полезности от потребления блага. Она является непрерывной и дифференцируемой на R^+. Кроме того, функция $U(c)$ строго возрастает и обладает свойством убывающей предельной полезности: $U'(c) > 0$, $U''(c) < 0$, $U'(0) = -\infty$. Аналогичные предположения справедливы для производственной функции $Q(K)$.

Положительный параметр β — это норма дисконтирования, или параметр склонности индивида к расходам: чем больше β, тем выше он ценит потребление товаров и услуг сегодня по отношению к будущему потреблению.

Значения T, β, r, W_0 и W_T заданы и положительны.

Целью индивида является максимизация дисконтированной полезности $U(c)$ за определенный промежуток времени $[0;\, T]$ с учетом всех указанных предположений.

Эта микроэкономическая задача из теории потребления с математической точки зрения представляет собой следующую модель оптимизации:

$$J = \int_0^T U(c(t))e^{-\beta t}dt \to \max, \qquad (1)$$

$$\dot{K}(t) + \dot{A}(t) = rA(t) + Q(K) - c(t), \qquad (2)$$

$$K(0) + A(0) = W_0,\ K(T) + A(T) \ \geq \ W_T, \qquad (3)$$

$$0 \ \leq \ c(t) \ \leq \ 1,\ t \in [0,\ T]. \qquad (4)$$

Согласно теории оптимального управления, функции $K(t)$ и $A(t)$ являются фазовыми траекториями, удовлетворяющими дифференциальному ограничению (2) и соотношениям (3) на концах временного отрезка $[0;\, T]$, а $c(t)$ — управление, ограниченное на этом промежутке за счет неравенства (4).

Качественный анализ модели

Прежде всего введем новое обозначение $\dot{K} = u$ и преобразуем дифференциальное соотношение (2) к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\dot{A}(t) = rA(t) + Q(K) - u(t) - c(t) \\ &\dot{K}(t) = u(t). \end{aligned} \qquad (5)$$

Заметим, что в отличие от управления $c(t)$ новое управление $u(t)$ может принимать отрицательные значения. Это экономически соответствует убыванию капитала и означает, что рост капитала, как и его преобразование в продукт потребления, не может быть мгновенным.

Проведем исследование модели (1), (3)–(5) с помощью теории оптимального управления — принципа максимума [13, с. 9; 14, с. 109].

Во всех следующих далее соотношениях принципа максимума [14, с. 109; 15, с. 36] опустим аргумент t для упрощения записи:

– функция Понтрягина —

$$H(t,\, K,\, A, c,\, u,\, \psi_1,\, \psi_2) = U\,(c)e^{-\beta t} +$$
$$+\ \psi_1\,(rA + + Q(K) - u - c) + \psi_2 u; \qquad (6)$$

– сопряженная система —

$$\dot{\psi}_1 = -r\psi_1,\ \dot{\psi}_2 = -Q'(K)\psi_1. \qquad (7)$$

Решение первого сопряженного уравнения этой системы имеет вид

$$\psi_1(t) = \psi_1(0)e^{-rt}, \qquad (8)$$

где значение $\psi_1(0)$ — произвольная константа.

Запишем условие максимума функции Понтрягина (6) по управлениям c и u с учетом вида (8) сопряженной переменной:

$$\overline{H}_c = (U'(c)e^{-\beta t} - \psi_1)c = (U'(c)e^{-\beta t} -$$
$$-\psi_1(0)e^{-rt})c \to \max_{0 \leq c \leq 1}. \qquad (9)$$

$$\overline{H}_u = (-\psi_1 + \psi_2)u \to \max_{|u| \leq 1}. \qquad (10)$$

После вынесения множителя $e^{-\beta t}$ условие (9) запишется в виде

$$(U'(c) - \psi_1(0)e^{(\beta - r)t})c \to \max_{0 \leq c \leq 1}. \qquad (11)$$

Для нахождения экстремали задачи проведем анализ поведения функций переключения $\overline{H}_c$ и $\overline{H}_u$ в зависимости от соотношений между параметрами модели. Очевидно, функция переключения $\overline{H}_c$ в общем слу-

Bulletin of Baikal State University, 2021, vol. 31, no. 2, pp. 216–220

чае нелинейна по управлению c, а функция $\bar{H}_u = (-\psi_1 + \psi_2)u$ линейна по u.

Сначала проанализируем поведение функции $\bar{H}_u$. Из (10) найдем компоненту $u^*(t)$ экстремального управления:

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & \psi_2 < \psi_1, \\ 1, & \psi_2 > \psi_1, \\ \forall u \in (-1;\ 1), & \psi_2 = \psi_1. \end{cases} \qquad (12)$$

Рассмотрим интервал особости $\Delta = \left\{ t \in [0;\ T] \middle| \dot{\bar{H}}_u = 0 \right\}$. компоненты управления u (так называемый магистральный участок). Из сопряженной системы (7) и условия (12) получим уравнение для нахождения магистрального значения $\bar{K}$ фазовой переменной K:

$$Q'(K) = r,\ t \in \Delta. \qquad (13)$$

Важно, что $\bar{K} = const$ в силу предположения строгого возрастания функции $Q(K)$. Подставляя $\bar{K} = const$ во второе уравнение системы (5), получим $\bar{u}(t) = 0$ на Δ.

Поскольку Δ — магистральный, то он занимает большую часть отрезка $[0;\ T]$. Из сопряженной системы (7) следует, что обе сопряженных переменных являются убывающими функциями на отрезке $[0;\ T]$, причем на Δ они равны, т.е. $\psi_1 = \psi_2$.

Теперь обратимся к функции $\bar{H}_c$. Нахождение критических точек функции (11) приводит к равенству

$$U'(c)\ c)' = \psi_1(0)e^{(\beta - r)t}.$$

После интегрирования последнего получим соотношение

$$U'(c)c = \frac{\psi_1(0)}{\beta - r} e^{(\beta - r)t}. \qquad (14)$$

Здесь с учетом $U'(c) > 0$, $\psi_1(0) \geq 0$ и, как следствие, из системы (7) $\psi_2(t) > 0$, $\psi_1(t) \geq 0\ \forall t \in [0;\ T]$. Тогда $c(t) \geq 0\ \forall t \in [0;\ T]$ и $\beta > r$.

Кроме того, из условий трансверсальности и этих рассуждений следует, что терминальное ограничение из (3) обращается в равенство

$$K(T) + A(T) = W_T. \qquad (15)$$

Если $\beta > r$, то функция (11) немонотонна по c и может достигать максимума внутри отрезка $[0;\ 1]$. Из (14) находим компоненту управления $c^*(t) = c(t,\ \psi_1(0))$ на отрезке $[0;\ T]$ как критическую точку функции $\bar{H}_c$. В силу вогнутости функции $U(c)$ возможны два случая:

1. Если $0 \leq c^*(t) = c(t,\ \psi_1(0)) \leq 1$, то она максимизирует функцию $\bar{H}_c$ и убывает на отрезке $[0;\ T]$.

2. Если $c^*(t) \notin [0;\ 1]$, то ее максимум достигается при $c^*(t) = 0$ на $[0;\ T]$.

Далее, анализируя систему (5), делаем следующие выводы (выкладки опустим в силу их громоздкости):

1. В первом случае $A(t)$ возрастает, а $K(t)$ убывает на начальном этапе рассматриваемого временного промежутка $[0;\ T]$ до магистрального участка Δ и после него до $t = T$, что возможно только при $u^*(t) = -1$. Этот случай реализуется при $Q'(K(t)) < r\ \forall t \notin \Delta$ и выполнении условия (13).

Структура экстремали следующая: $u^*(t) = \begin{cases} -1, & t \notin \Delta \\ 0, & t \in \Delta \end{cases}$, $c^*(t)$ находится из уравнения (14), соответствующие им фазовые траектории $K^*(t)$ и $A^*(t)$ нетрудно отыскать путем интегрирования уравнений системы (5) с учетом условий (3) и (15) при конкретизации функций $Q(K)$ и $U(c)$.

2. Во втором случае $A(t)$ немонотонна (до участка Δ убывает, а после него возрастает), $K(t)$ монотонно убывает на всем промежутке $[0;\ T]$. Этот случай имеет место при $Q'(K(t)) > r$ для всех t, расположенных левее Δ, при $Q'(K(t)) < r$ для всех t, расположенных правее Δ, и выполнении условия (13). При этом структура экстремали такова:

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,\ \tau), \\ 0, & t \in \Delta, \\ -1, & t \in (\tau_1,\ T], \end{cases},$$

где концы промежутка $\Delta = [\tau,\ \tau_1]$ легко определяются в ходе решения, $c^*(t) = 0$ на $[0;\ T]$, соответствующие им фазовые траектории $K^*(t)$ и $A^*(t)$ находятся по аналогии с первым случаем.

Отметим, что найденная с помощью принципа максимума экстремаль является оптимальной, поскольку функция Понтрягина (6) вогнута по совокупности переменных K, A, c, u, и сопряженные переменные ψ_1, ψ_2 положительны.

В заключение приведем экономическую интерпретацию качественного анализа модели: если коэффициент дисконтирования β превышает процентную ставку r на активы $A(t)$, то в зависимости от колебаний текущей величины предельного продукта капитала $Q'(K)$ относительно ставки r на фоне уменьшения текущего потребления $c(t)$ на протяжении всего периода времени $[0;\ T]$ возможны две стратегии поведения потребителя.

Известия Байкальского государственного университета. 2021. Т. 31, № 2. С. 216–220

ISSN 2500-2759

1. Рекомендуется большую часть имеющихся средств вкладывать в активы $A(t)$ и осуществлять небольшие, но постоянные вложения $\overline{K}$ в капитал $K(t)$, за исключением начального и заключительного этапов временного периода $[0; T]$ (этапы «проедания» капитала и / или его перетока в активы).

2. На начальном этапе распределения средств необходимо сделать ставку на увеличение капитала $K(t)$ до уровня $\overline{K}$, затем — на поддержание этого уровня вплоть до заключительного этапа перетока капитала в активы $A(t)$.

Результаты исследования носят рекомендательный характер для предпринимателя, принимающего решение в подобной экономической ситуации. Очевидно, в обеих стратегиях приветствуется политика накопления.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бартенев С.А. Экономические теории и школы (история и современность) : курс лекций / С.А. Бартенев. — Москва : БЕК, 1996. — 352 с.
2. Рикардо Д. Сочинения : в 3 т. / Д. Рикардо ; пер с англ. — Москва : Госполитиздат, 1955. — Т. 1: Начала политической экономии и налогового обложения. — 360 с.
3. Пигу А. Экономическая теория благосостояния : в 2 т. / А. Пигу. — Москва : Прогресс, 1985. — Т. 1. — 512 с.
4. Веселов Д.А. Макроэкономика финансовых рынков : учебник / Д.А. Веселов, С.Э. Пекарский. — Москва : ВШЭ, 2011. — 255 с.
5. Аксенюшкина Е.В. Решение одной задачи оптимального распределения ресурсов / Е.В. Аксенюшкина // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. — 2019. — № 1. — С. 3–12.
6. Астафьев С.А. Применение методов математического программирования для оптимизации финансирования сферы креативных индустрий / С.А. Астафьев, М.Е. Решетников // Креативные индустрии в региональном пространстве социальных услуг и бизнеса : материалы Первой регион. науч.-практ. конф., посвящ. 100-летию Иркут. гос. ун-та и 20-летию Ин-та соц. наук. — Иркутск, 2018. — С. 67–71.
7. Леонова О.В. Моделирование процессов убытков страховщика с помощью вероятностных распределений на примере страховой компании РОСГОССТРАХ / О.В. Леонова, П.Г. Сорокина. — DOI 10.17150/2411-6262.2017.8(4).27 // Baikal Research Journal. — 2017. — Т. 8, № 4. — URL: http://brj-bguep.ru/reader/article.aspx?id=21915.
8. Шуплецов А.Ф. Моделирование оптимальной стратегии развития предпринимательской деятельности промышленной компании на основе эффективного использования потенциала нематериальных ресурсов / А.Ф. Шуплецов, П.В. Харитонова // Известия Иркутской государственной экономической академии (Байкальский государственный университет экономики и права). — 2013. — № 6. — URL: http://brj-bguep.ru/reader/article.aspx?id=18651.
9. Ованесян С.С. Модель оптимизации налоговой нагрузки отраслей региона / С.С. Ованесян, Н.И. Черхарова // Известия Иркутской государственной экономической академии (Байкальский государственный университет экономики и права). — 2013. — № 2. — URL: http://brj-bguep.ru/reader/article.aspx?id=17282.
10. Hubbard R.G. Precautionary Saving and Social Insurance / R.G. Hubbard, J. Skinner, S. Zeldes // Journal of Political Economy. — 1995. — Vol. 103, № 2. — P. 360–399.
11. Туманова Е.А. Макроэкономика. Элементы продвинутого подхода : учебник / Е.А. Туманова, Н.Л. Шагас. — Москва : Инфра-М, 2004. — 400 с.
12. Сараев В.В. Современные тенденции потребления: теоретические аспекты : дис. ... канд. экон. наук : 08.00.01 / В.В. Сараев. — Санкт-Петербург, 2007. — 165 с.
13. Сотсков А.И. Оптимальное управление в примерах и задачах / А.И. Сотсков, Г.В. Колесник. — Москва : Рос. экон. шк., 2002. — 58 с.
14. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике: теория и приложения : учеб. пособие / Б.А. Лагоша, Т.Г. Апалькова. — Москва : Финансы и статистика, 2008. — 224 с.
15. Специальные разделы теории управления. Оптимальное управление динамическими системами : учеб. пособие / Ю.Ю. Громов, Н.А. Земской, А.В. Лагутин [и др.]. — Тамбов : Изд-во ТГТУ, 2007. — 108 с.

Информация об авторе

Антипина Наталья Валерьевна — кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математических методов и цифровых технологий, Байкальский государственный университет, г. Иркутск, Российская Федерация, e-mail: natant2012@mail.ru.

Author

Natalya V. Antipina — Ph.D. in Physics and Mathematics, Associate Professor, Department of Mathematical Methods and Digital Technology, Baikal State University, Irkutsk, the Russian Federation, e-mail: natant2012@mail.ru.

Для цитирования

Антипина Н.В. Модель межвременной оптимизации поведения предпринимателя / Н.В. Антипина. — DOI 10.17150/2500-2759.2021.31(2).216-220 // Известия Байкальского государственного университета. — 2021. — Т. 31, № 2. — С. 216–220.

For Citation

Antipina N.V. Intertemporal Optimization Model of Entrepreneur's Behavior. *Izvestiya Baikal'skogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Baikal State University*, 2021, vol. 31, no. 2, pp. 216–220. DOI: 10.17150/2500-2759.2021.31(2).216-220. (In Russian).

ISSN 2500-2759